Armonías notables

entre

El Algebra y la Trigonometría

1878

Grandes son las bellezas que encierra el árbol fecundo de la Matemática, cuyas ramas entrelazándose entre sí, forman un conjunto precioso y armónico, cual no pueda presentar otra ciencia alguna: así lo comprendió Pascal, cuando dijo que los números imitan al espacio, así lo corroboran los hechos, cuando, por ejemplo, se trata de resolver una ecuación de tercer grado, siendo las raíces todas reales, pues las fórmulas algebraicas irreductibles que no tienen utilidad alguna directamente, por hallarse compuestas de muchas imaginarias; resuélvese fácilmente por medio de consideraciones trigonométricas, conforme lo estableció el célebre ***Lagrange,*** valiéndose del coseno: por esto nosotros pretendemos hacer admirar una vez mas la influencia de la Trigonometría, en algunas cuestiones algebraicas; no para decir cosas nuevas, pues hoy casi nada se dice que dicho no esté, sino para inclinar a la juventud estudiosa, a esta clase de trabajos, a fin de que saque preciosos frutos de esas relaciones íntimas que existen entre la cantidad continua y discontinua; relaciones harto descuidadas, desgraciadamente, por la mayor parte de los que se dedican a la Matemática.

Sábese por los principios de la Trigonometría que:

$$\operatorname{tg} 2\mathrm{a} = \frac{2 \operatorname{tg} \mathrm{a}}{1 - \operatorname{tg}^2 \mathrm{a}}$$

de donde

$$\operatorname{tg}^2 \mathrm{a} + \frac{2}{\operatorname{tg}^2 \mathrm{a}} \operatorname{tga} - 1 = 0$$

Si consideramos ahora la ecuación general, $x^2 + px - 1 = 0$; identificando esta ecuación con la anterior, resulta;

$$\frac{2}{\operatorname{tg} 2\mathrm{a}} = p$$

o sea

$$\operatorname{tg} 2\mathrm{a} = \frac{2}{p}$$

La tangente de la mitad de este ángulo, será el valor de una de las raíces; la otra vendrá expresada por: $\operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$. Para ser esto evidente, es preciso que:

$$\operatorname{tg} \mathrm{a} + \operatorname{tg}\left(\mathrm{a} + \frac{\pi}{2}\right) = -p = -\frac{2}{\operatorname{tg} 2\mathrm{a}}$$

$$\operatorname{tg} a \times \operatorname{tg}\left(\mathrm{a} + \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Desarrollando, se tiene:

$$\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-(-a)\right)=\operatorname{tg} a+\cot(-a)=\operatorname{tg} a-\cot a=\operatorname{tg} a-\frac{1}{\operatorname{tg} a}=\frac{\operatorname{tg}^2 a-1}{\operatorname{tg} a}=$$

$$=\frac{2}{\dfrac{2\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg}^2 a-1}}=-\frac{2}{\dfrac{2\operatorname{tg} a}{1-\operatorname{tg}^2 a}}=-\frac{2}{\operatorname{tg} 2a}\rightarrow \quad \text{Primer Valor}$$

luego:

$$\operatorname{tg} a\times\operatorname{tg}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg} a\times-\cot a=-\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} a}=-1\rightarrow \text{Segundo valor}$$

Empero la ecuación $x^2+px-1=0$ no es el tipo general de segundo grado, pues el término conocido en lugar de ser un número cualquiera, es la unidad; así, si deseamos resolver la ecuación $x^2 px-q=0$ supondremos $x=\sqrt{q}\times r$ lo que da: $qr^2+p\sqrt{qr}-q=0$: o sea;

$$r^2+\frac{p}{\sqrt{q}}r-1=0$$

forma parecida a la primera, pero que: $\dfrac{2}{\operatorname{tg} 2a}=\dfrac{p}{\sqrt{q}}$ o sea: $\operatorname{tg} 2a=\dfrac{2\sqrt{q}}{p}$.

La tangente de la mitad de este ángulo, será el valor de *r*, por consiguiente las dos raíces x_1 x_2 vendrán expresadas por:

$$x_1=\sqrt{q}\operatorname{tg} a,\quad x_2=\sqrt{q}\operatorname{tg}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)$$

Si el término conocido es positivo, entonces debe suponerse que las dos raíces son del mismo signo (positivo o negativo según el signo del segundo término) en este caso debemos valernos de otras consideraciones trigonométricas, suponiendo que una raíz venga expresada por $\operatorname{tg} a$ y la otra por $\cot a$ a fin de que resulte el producto con el signo más y en este supuesto el coeficiente del segundo término será:

$$\pm(\operatorname{tg} a+\cot a)=\pm\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}\pm\frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}=\pm\frac{2}{\operatorname{sen} 2a}$$

luego la ecuación de segundo grado que contiene dichas raíces vendrá expresada por:

$$x^2\pm\frac{2}{\operatorname{sen} 2a}x+1=0$$

comparando esta ecuación con la general $x^2 \pm px + 1 = 0$ resulta: $\frac{2}{\operatorname{sen} 2a} = p$

de donde:

$$\operatorname{sen} 2a = \frac{2}{p}$$

Por medio de esta relación, las tablas trigonométricas darán a conocer el valor de 2*a*, y por consiguiente el de *a*, a fin de que la tangente y cotangente de este último ángulo, nos den las raíces pedidas.

Tomando la ecuación general: $x^2 \pm px + q = 0$ suponiendo $x = z\sqrt{q}$ se tiene:

$$z^2 \pm \frac{p}{\sqrt{q}} z + 1 = 0$$

de donde

$$\operatorname{sen} 2a = \frac{2\sqrt{q}}{p}$$

resultando para las raíces, los valores siguientes:

$$x_1 = \sqrt{q}\,\operatorname{tg} a \quad x_2 = \sqrt{q}\cot a$$

Cabe hacer aquí, una consideración importante, y es que: $\frac{2\sqrt{q}}{p}$, por representar el valor del seno de un ángulo, debe ser una cantidad menor que uno, o sea $\frac{2\sqrt{q}}{p} \prec 1$ de donde $\frac{p^2}{4} - q \succ 0$ principio muy conocido de las ecuaciones de segundo grado, para que las raíces sean reales, tales como las hemos supuesto desde un principio.

Si $\frac{p^2}{4} - q \prec 0$ y por consiguiente $\frac{2\sqrt{q}}{p}$ mayor que la unidad, no puede determinarse el valor de $\operatorname{sen} 2a$ y en su virtud, los de $\operatorname{tg} a$ y $\cot a$: de suerte que, ningún valor real de *x*, puede satisfacer a la ecuación. En este caso nos vemos obligados a servirnos de nuevas expresiones trigonométricas, cuando las raíces son imaginarias.

La forma imaginaria: $a + b\sqrt{-1}$ permite escribirla de la manera siguiente: $\varphi\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\right)$ en que: $\varphi = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\frac{a}{\varphi} = \cos\alpha$, $\frac{b}{\varphi} = \operatorname{sen}\alpha$

Pero como la suma y el producto de las dos raíces deben ser cantidades reales, es necesario que si una de las raíces imaginarias, se expresa por: $\varphi\left(\cos\alpha+\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha\right)$, la otra, sea su conjugada $\varphi\left(\cos\alpha-\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha\right)$

Tomando pues estas dos raíces a la vez, y elevando el resultado al cuadrado, resulta:

$$\varphi^2\left(\cos\alpha\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha\right)^2=\varphi^2\left[\cos^2\alpha\pm 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\sqrt{-1}-\operatorname{sen}^2\alpha\right]=$$
$$=\varphi^2\left[\cos^2\alpha\pm 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha\sqrt{-1}-\left(1-\cos^2\alpha\right)\right]$$

luego:

$$\left[\varphi\left(\cos\alpha\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha\right)\right]^2-2\varphi\cos\alpha\left[\varphi\left(\cos\alpha\pm\sqrt{-1}\operatorname{sen}\alpha\right)\right]+\alpha^2=0$$

El término conocido φ^2 es siempre superior al cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término, conforme a la condición de imaginarismo $\frac{p^2}{4}-q\prec 0$.

En su virtud, si se trata de resolver la ecuación $x^2+px+q=0$, siendo $\frac{p^2}{4}-q\prec 0$ supondremos $p=-2\varphi\cos\alpha,\ q=\varphi^2$ para obtener así la forma algebraica, bien conocida de las raíces imaginarias.

Para comprender mejor todo cuanto acabamos de decir, nos permitimos la libertad de resolver algunos ejemplos prácticos, para admirar mejor la armonía que existe entre el Algebra y la Trigonometría.

<u>Primer ejemplo</u>: $x^2-8x-5=0$

Comparando esta ecuación, con la general $x^2+px-q=0$ tendremos, según lo explicado:

$$\frac{-2\sqrt{q}}{p}=\operatorname{tg}2a$$

luego

$$\frac{-2\sqrt{5}}{8}=\operatorname{tg}2a$$

o sea: $-0{,}559=\operatorname{tg}2a$

Consideremos por un momento 0,559 como positivo, y así hallaremos el arco a que corresponde, determinando primero su logaritmo $\bar{1},74741181$, y restableciendo el radio de las tablas se transforma en 9,74741181: determinando, ahora, el arco de la tangente que corresponde a este logaritmo será: 29°12'18''66 = 2a'; 14°36'9''3 = a'.

A fin de considerar el número 0,559 negativamente bastará tomar el suplemento del ángulo anterior o sea 150°47'41''34 y tomando por fin la mitad de este valor resulta; a = 75°23'50''7; hallando, ahora, el valor a que corresponde este arco, bastará hallar primero su logaritmo 10,5841385, y luego quitar el valor del radio para buscar el número correspondiente, esto es; 3,8383.

Así pues, tendremos:

$$x_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,a = \sqrt{5} \times 3{,}8383 = 8{,}5824$$
$$x_2 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\left(75^0 23'50''7 + 90^0\right) = \sqrt{q} \times -\cot 75^0 23'50''7 = \sqrt{5} \times -0{,}2605 = -0{,}581.$$

Sustituyendo estos dos valores en la ecuación $x^2 - 8x - 5 = 0$ es fácil de ver, como queda satisfecha aproximadamente, conforme a los valores de las raíces que se obtendrían determinando los dos valores numéricos de la fórmula general:

$$x = 4 \pm \sqrt{16+5} = 4 \pm 4{,}58 \begin{cases} x_1 = +8{,}58 \\ x_2 = -0{,}58 \end{cases}$$

Segundo ejemplo.-
Consideremos la ecuación: $x^2 \pm 9x + 12 = 0$ en que las dos raíces son del mismo signo; si se compara ésta con la general; $x^2 \pm px + q = 0$ suponiendo $x = \sqrt{q} \times z,$, resulta; $z^2 \pm \frac{p}{\sqrt{q}} z + 1 = 0$

cuya ecuación permite escribir $\frac{2}{\mathrm{sen}\,2a} = \frac{p}{\sqrt{q}}$ según lo explicado en un principio.

Así, pues, tendremos: $\mathrm{sen}\,2a = \frac{2\sqrt{q}}{p} = \frac{2\sqrt{12}}{9} = 0{,}7698$ y como esta relación, es menor que la unidad, las raíces deben ser reales, sujetándose el caso al segundo procedimiento general: de modo que 2a = 50°20' aproximadamente; luego a = 25°10'. De donde resulta para las raíces:

$$x_1 = \sqrt{q}\,\mathrm{tg}\,a \qquad x_2 = \sqrt{q}\cot a$$

los valores particulares:

$$x_1 = 3{,}464 \times 0{,}4698 = 1{,}627 \text{ aproximadamente}$$
$$x_2 = 3{,}464 \times 2{,}1280 = 7{,}371 \text{ aproximadamente}$$

Estas raíces corresponden, para cuando el coeficiente del segundo término es menos, resultando para cuando sea más, los mismos valores absolutos, pero negativamente. Estos resultados quedan comprobados por las fórmulas siguientes:

$$x^2 - 9x + 12 = 0 \quad x = 4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25 - 12} = 4{,}5 \pm 2{,}87 \begin{cases} x_1 = 7{,}37 \\ x_2 = 1{,}63 \end{cases}$$

$$x^2 + 9x + 12 = 0 \quad x = -4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25 - 12} = -4{,}5 \pm 2{,}87 \begin{cases} x_1 = -1{,}63 \\ x_2 = -7{,}37 \end{cases}$$

Tercer ejemplo.-

Sea $x^2 + 5x + 18 = 0$ y como $\frac{p^2}{4} - q \prec 0$ las raíces son imaginarias, y para su resolución nos valdremos de la tercera consideración, comparando la ecuación general: $x^2 + px + q = 0$ con la siguiente:

$$\left[\varphi\left(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\right]^2 - 2\varphi\cos\alpha\left[\varphi\left(\cos\alpha \pm \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\alpha\right)\right]^2 + \varphi = 0$$

luego

$$p = -2\varphi\cos\alpha, \quad \varphi = \sqrt{q}$$

aplicando estas consideraciones generales al caso particular que nos ocupa; se tiene:

$$\varphi = \sqrt{18}\ ; \ \cos\alpha = \frac{-5}{2\sqrt{18}} = -0{,}589$$

Recordando, ahora, que: $a = \varphi\cos\alpha$ y $b = \varphi\,\mathrm{sen}\,\alpha$, resulta:

$$a = \varphi\cos\alpha = \sqrt{18} \times -0{,}589 = -\,2{,}5 \text{ aproximadamente}$$
$$b = \varphi\,\mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{18} \times \pm 0{,}808 = \pm\,3{,}4259 \text{ aproximadamente}$$

Se escribe el doble signo en el valor del seno porque a un mismo coseno corresponden dos senos de igual valor absoluto y de diferente signo: así tendremos, pues:

$$a \pm b\sqrt{-1} = -2{,}5 \pm 3{,}4259\sqrt{-1}$$

valores de las dos raíces imaginarias, conforme a los que resultarían, salvo error de tabla, de la fórmula general: $x = -2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 18} = -2{,}5 \pm \sqrt{11{,}75}\sqrt{-1} = -2{,}5 \pm 3{,}42\sqrt{-1}$ deducida de la ecuación: $x^2 + 5x + 18 = 0$ que nos ocupa.

Por fin, si esta ecuación se presentara con el segundo término negativo, tal como:

$$x^2 - 5x + 18 = 0$$

haríamos la suposición:

$$p = 2\varphi\cos\alpha, \quad \varphi = \sqrt{q}$$

resultando por cálculos análogos;

$$a = \sqrt{18} \times 0.589 = 2{,}5 \text{ aproximadamente}$$
$$b = \sqrt{18} \times \pm 0.808 = \pm 3{,}4259 \text{ aproximadamente}$$

Y para: $a \pm b\sqrt{-1}$, el valor siguiente $2{,}5 \pm 3{,}4259\sqrt{-1}$; que corresponde, salvo error de tabla, al que resulta de la fórmula general: $x = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 18} = 2{,}5 \pm 3{,}42\sqrt{-1}$.

Creemos que lo dicho será suficiente para admirar la bella correspondencia que existe entre el Algebra y la Trigonometría, y si bien la aplicación de la Trigonometría, para determinar las raíces de una ecuación de segundo grado, no presenta el interés que fuera de desear, en cambio aplicada a ecuaciones de grados superiores, ofrece ventajas de que carecen las de segundo, y en particular, cuando dicha Trigonometría se encarga de expresar las cantidades imaginarias dirigidas, las cuales, es muy probable, que resuelvan de una vez y de un modo completo la célebre teoría de las ecuaciones: problema arduo y difícil, que por espacio de mucho tiempo ha atormentado la inteligencia de los más preclaros matemáticos, sin que pudieran hallar jamás, aquella solución definitiva, tan suspirada por los verdaderos amantes de la Ciencia.

Tarragona 30 junio de 1878
Lauro Clariana Ricart