La Metafisica del Cálculo

1908

La Ciencia, aunque basada en principios sólidos e incontrovertibles, puede manifestarse bajo formas diferentes y complicadas que, cual ondas que se cruzan y entrelazan, envuelven ciertos puntos que constituyen los axiomas y postulados de la misma. La Matemática se halla en este caso más que otra ciencia alguna: sus formas son tan varias y complejas que infunden en ciertos momentos el desaliento en quien pretende profundizarlas demasiado.

La definición más general que puede concederse a la Matemática, es considerarla como una serie de conocimientos científicos relativos a la cantidad, unidos estrechamente entre sí, y cuyas nociones se fundan en verdades potísimas que la razón es capaz de descubrir sin necesidad del mundo externo; pero que pueden confirmarse por él, en los límites que la experiencia permite. Dicho se está que la verificación empírica de una ley matemática puede ser rigurosa o aproximada; en efecto, si se trata de comprobar que las medianas de un triángulo se encuentran en un mismo punto, resulta una verificación empírica aproximada; si se quiere afirmar el principio de Euler, respecto a los poliedros regulares, la comprobación empírica es completamente exacta.

En la exposición de la doctrina matemática, hállanse además ideas fundamentales, que constituyen su parte filosófica: tales son las nociones de cantidades negativas, imaginarias e infinitesimales. Negar la existencia de semejantes cantidades porque no podemos hacerlas descender de la altura en que se hallan, equivale a no creer en la belleza de las artes porque no la podemos tocar.

El objetivo principal de esta parte de la Matemática consiste en distinguir el orden y la dependencia racional de ciertas verdades abstractas, a fin de que desde este punto elevado, el espíritu contemple el cuadro perfecto de la Ciencia, y en su virtud, al aceptar tal o cual encadenamiento de proposiciones, decida del esquema para la construcción de dicha Ciencia, obedeciendo siempre a su mayor orden y conexión.

Empero, a pesar de ser tan varios los elementos con que cuenta la Matemática, su tendencia a la unificación se hace cada día mas visible, como lo prueban los bellísimos conceptos de Descartes y Leibnitz, brillantemente expuestos por M. Poinsot, cuando dice: «*La idea de orden bajo la cual se subordinan los específicos de situación, de configuración, de forma, de combinación, debe ser la predominante, seguida de la de magnitud, que implica la cantidad, de proporción y medida. De suerte que la Matemática, considerada del modo más general, puede ser definida como la Ciencia que tiene por objeto el orden y la medida*»

Bien podríamos decir, pues, que el orden y la medida forman sus categorías fundamentales: dualidad que aun podríamos reducir a la unidad, según el concepto de Leibnitz, cuando indica que el orden de las funciones simultáneas está en el espacio, así como en el tiempo el orden de los fenómenos sucesivos, resultando de aquí que toda especulación matemática se reduce a la única idea de orden, si el espacio y tiempo son sus factores: unidad sistemática dentro de su génesis.

Verdaderamente que la unidad en la variedad y la variedad en la unidad constituyen la base de las preciosas leyes armónicas que rigen el Universo, y desde este punto de vista es permitido afirmar que toda la actividad humana se reduce a unir y desunir, a componer y descomponer, a adicionar y substraer, únicas operaciones indispensables para penetrar en medio de esta inmensa variabilidad de elementos que nos rodean por todas partes.

En su virtud, imposible es negar la tendencia del espíritu humano hacia la unidad, hacia la identidad, hacia la homogeneidad; mas los límites de nuestro entendimiento nos obligan a componer y descomponer constantemente a fin de poder avanzar por el camino de la perfección.

De esta suerte se llega a concebir la idea de la ley de continuidad, como síntesis de los fenómenos que se realizan en la naturaleza. Ley que encierra la parte principal de la Metafísica del cálculo, o sea, según M. Carnot, la Filosofía Matemática, bien que sea muy difícil de penetrar, razón por la cual se inclinan algunos matemáticos a considerar la discontinuidad como base de sus especulaciones científicas.

Es indudable que de la Matemática nacen dos ramas a cuál más importante: el Análisis y la Geometría; ramas seculares y llenas de vida, de las cuales brotan otras secundarias que, enlazándose entre sí, forman luego un conjunto compacto y armónico que puede condensarse en una sola palabra, en un solo nombre genérico: la cantidad, síntesis del Análisis y Geometría; concepto que abarca, no solo lo finito y lo indefinido, sino también el modo de ser de la misma.

Bien es verdad que la tendencia a la Geometría es notoria en todos tiempos, llegando a servir de gran auxiliar hasta para el Análisis, y si bien ella tiene el poder de fotografiar las funciones y hacerlas por consiguiente más comprensibles, no cabe duda que el análisis es más poderoso, aunque más difícil, rebasando los límites de la Geometría. Y si bien los geómetras han dado pruebas clarividentes de su ingenio, hasta el punto de afirmar que los teoremas de Lobatschewsky, Riemann, Helmoltz y Beltrami, forman la única base de la teoría completa del paralelismo, siendo Lobatschewsky, respecto de Euclides, lo que Copérnico de Ptolomeo; lo cierto es que el Análisis, salvo sus dificultades, puede alcanzar más que la Geometría, aparte de que es deudor a ésta de la noción de la ley de continuidad, la cual, llevada dentro del Análisis, presta mejores servicios que en la misma Geometría, al establecer la verdadera Algebra directiva e infinitesimal.

Así, pues, las consideraciones sobre la Metafísica del cálculo en esta Memoria, solo al infinitésimo, dentro del Análisis, se dirigirán, por constituir esta idea la verdadera peana sobre la cual descansa la Ciencia matemática.

A este fin, se considera la cantidad dividida en tres categorías, dentro de la idea última que sostiene la cantidad: la variabilidad. Lo indefinidamente pequeño, lo finito y lo indefinidamente grande, constituyen las tres categorías de cantidad a la par y son como las raíces, tronco y ramas del frondoso árbol de la Matemática.

La obra de cálculos de Lacroix forma la síntesis de todos los conocimientos desarrollados desde Leibnitz, fundador de la célebre diferencial, siendo a la par notabilísima la clásica obra de Legendre, la cual trata de las integrales elípticas y eulerianas, estudios que sirvieron luego a los analistas para remontarse a esferas superiores. Desgraciadamente, hay que conceder que los trabajos de Legendre habrían quedado interrumpidos si Abel y Jacobi no hubiesen tenido la grata sorpresa de encontrar en las funciones doblemente periódicas el estudio de las funciones inversas de las integrales elípticas.

Estos notables trabajos influyeron, sin duda, en el ánimo de un nuevo matemático, que se propuso sistematizar el análisis superior a fin de formar cuerpo de doctrina con cuantas teorías se habían esparcido hasta entonces por el vasto campo de la Ciencia Matemática; este matemático notable es Agustín L. Cauchy, uno de los alumnos más distinguidos de la Escuela Politécnica, y que de muy joven perteneció a la Academia de Ciencias de París, ocupando al propio tiempo la cátedra de Mecánica de la mencionada Escuela. La importancia de la escuela de Cauchy estriba, principalmente, en haber considerado las integrales entre límites imaginarios, conforme con las integrales curvilíneas de Neumann. En este concepto divide las funciones en monodromas o monotropas, politropas, meromorfas, monógenas y holomorfas, siendo estas últimas las más importantes para el desarrollo de funciones en forma de serie.

Además, la falta de continuidad en las funciones, que a primera vista podría parecer como grave inconveniente, es para él fruto provechoso, por cuanto le sirve de principio en la teoría de los residuos, origen de inesperados y sorprendentes teoremas para alcanzar el estudio de las funciones elípticas.

No se crea, sin embargo, que con esto quede cerrado el círculo de acción de las funciones elípticas, pues en la obra de Forsyth, encuéntranse ya tres vías distintas que conducen al desarrollo de las precitadas funciones, esto es, según las doctrinas de Cauchy, según las funciones de Weientras y, por último, conforme a las superficies especiales de Riemann.

Todos estos avances notables de la Ciencia Matemática descansan, sin duda, en la diferencial de Leibnitz, palanca poderosa del análisis, estudio el más importante para la Matemática del cálculo, y en el cual exclusivamente nos vamos a ocupar.

Sin duda que la diferencial de Leibnitz tiene por origen la ley de continuidad, habiendo producido la introducción de su algoritmo en el análisis grandes controversias, por lo que precisa estudiar a fondo esta cantidad, según principios filosóficos, para dar a entender que la aplicación del método Leibnitziano en nada altera la exactitud de la Matemática, dentro de la finitud.

Diversas son las opiniones entre los matemáticos respecto a la apreciación de ese *algo*, que constituye una diferencial.

Algunos autores emplean la palabra de infinitamente pequeño en el sentido de que se trata de una cantidad que es menor que toda otra dada, por pequeña que ésta sea; empero, según esta definición, claro está que no debe haber diferencia alguna entre un infinitamente pequeño y una cantidad nula, como así lo confirma el distinguido matemático Mausion.

Para evitar esta dificultad se formó otra escuela, fundada también en el infinitamente pequeño, pero en el concepto de que existen cantidades diferentes de cero, que son a la vez menores que toda cantidad asignable, por pequeña que sea. Estas cantidades suelen designarse bajo el nombre de pseudo-infinitamente pequeñas.

Según Mausion, un infinitamente pequeño no es más que una cantidad variable que tiene por límite cero, llegando a ser tan pequeña como se quiera, sin jamás resultar nula; en este concepto, dicho matemático cree que la palabra de infinitamente pequeño debiera cambiarse por la de indefinidamente pequeño.

De las consideraciones anteriores se deduce, conforme a la opinión de algunos matemáticos modernos y amigos de la verdadera lógica, que solo el indefinidamente pequeño y no el infinitamente pequeño, debe entrar en la Matemática.

Al constituir la génesis de la cantidad fácilmente se concibe, no solo la existencia de sus tres categorías, sino los órdenes que cabe establecer dentro de lo indefinidamente pequeño, así como entre los indefinidamente grandes.

En efecto; representemos por i, el indefinidamente pequeño de primer orden; y por I, el indefinidamente grande también de primer orden. Hay que advertir que esta segunda cantidad no es sino la recíproca de la primera.

Según esta notación, podemos fácilmente dar a conocer la serie general que puede establecerse, atendiendo a sus categorías y a sus diferentes órdenes.

La serie de los números finitos se forma comparándolos con la unidad finita. Así:

$$0.1.....0{,}1\times1.....1\times1.....10\times1.....100\times1.....$$

Los puntos indican todas las cantidades intermedias que podemos imaginar.

Ahora bien; si nos fijamos un poco en el fenómeno que se opera en nuestra inteligencia a medida que el número va aumentando, es de ver que se desarrolla en nosotros una idea de indeterminación o de vaguedad, como si dijéramos de algo que nos hace perder la noción de número; y como quiera que no cabe fijar cual es el mayor de todos los números, naturalmente que de ahí se infiere la necesidad que hay de admitir una cantidad fuera de la finitud que sea mayor que otra expresada por un número, por grande que éste fuere; he aquí el origen del primer indefinidamente grande; indefinidamente grande de primer orden: primera unidad trascendental que puede servir para continuar la génesis de la cantidad, bajo la forma que a continuación se expresa:

$$1.I.....10.I.....100.I.....$$

Fácilmente se concibe que esta serie tiende hacia un indefinidamente grande; referida a la unidad primera trascendente *I*; luego así se obtiene un indefinidamente grande de segundo orden expresado por I_2 ó también por I^2 a fin de que así se pueda sujetar este símbolo a las mismas operaciones algorítmicas de la cantidad finita.

Así continuando podríamos proceder para formar la génesis de los indefinidamente pequeños.

$$0{,}1\times \mathrm{I}.....0{,}01\times \mathrm{I}.....0{,}001\times \mathrm{I}.....i$$

$$0{,}1\times i.....\ 0{,}01\times i.....\ 0{,}001\times i.....i^2$$

De los precedentes resultados se deduce que de esa escala de categorías y órdenes, la cantidad finita podríamos decir que solo ocupa un peldaño.

En suma: si atendemos al producto de unidades, dentro de una misma categoría, resultan las consecuencias altamente importantes siguientes:

- La unidad de las cantidades finitas es invariable por todas sus potencias.
- La unidad de las cantidades indefinidamente pequeñas cambia de orden, según su potenciación, acercándose a cero a medida que aumenta el exponente.

La unidad de las cantidades indefinidamente grandes cambia de orden, según su potenciación, pasando a órdenes superiores a medida que aumenta el exponente.

Si atendemos luego al producto de unidades referidas a diferentes categorías, resulta:

$$i \text{ x } I = \text{cantidad finita},$$

que en este caso particular se resuelve en la unidad

$$i\times I_2 = I, \qquad i_2\times I = i, \qquad i_2\times I_2 = I.....$$

Todas estas consecuencias se deducen fácilmente al hacer extensiva la definición que se da de la multiplicación a la cantidad infinitesimal, por cuanto tiene el derecho de que sea tratada como la cantidad finita, por tener la nota común a ella: la variabilidad; cosa imposible de admitir si comparamos el indefinidamente pequeño y el indefinidamente grande con el cero y el infinito, pues estos símbolos han llegado a perder dicha variabilidad.

Empero hay que tener en cuenta que lo infinitésimo no suele expresarse de una manera escueta por las unidades trascendentales, como acabamos de manifestar, sino que dichas unidades llevan el rastro de la finitud como factor, cantidad que es la que luego aparece en el resultado que se propone el matemático.

Así, un indefinidamente pequeño del orden enésimo tiene, en general, la forma siguiente:

$$\omega_n = Ki^n$$

en la que K es una cantidad finita.

De un modo análogo se tiene para un indefinidamente grande del orden n,

$$\Omega_n = KI^n$$

Bien puede decirse que la parte metafísica del cálculo Leibnitziano, como síntesis de todos los demás métodos que a él se refieren, y por ser el más importante de todos hasta hoy, consiste en saber que cuando se tiene la igualdad planteada, según diferentes órdenes de cantidades infinitesimales, basta dividir ambos miembros de la igualdad por el orden inferior para alcanzar la igualdad dentro de la finitud, puesto que todos los términos, excepto los de orden inferior, se resuelven en indefinidamente pequeños, los cuales pueden dejarse de tener en cuenta, ya que son de naturaleza diferente de la finitud, y supuesto tácitamente que la igualdad se establece bajo la base de referirse exclusivamente a la finitud.

Cosa semejante resulta, sin que jamás se hayan opuesto a ello los matemáticos, cuando se plantea una igualdad, bajo la condición tácita de considerar tan solo cantidades conmensurables o reales, pues si en algún miembro hubiese cantidades inconmensurables o imaginarias, se considera con el derecho de prescindir de ellas.

Por fin, la génesis de la cantidad nos conduce directamente al estudio de las cantidades que difieren entre si indefinidamente poco, como resultado en general de dos indefinidamente pequeños del mismo orden cuya diferencia se resuelve en un indefinidamente pequeño de orden superior al suyo.

En efecto; la diferencia de dos indefinidamente pequeños del mismo orden, según los génesis de la cantidad que precede, se puede expresar por:

$$Ki^n - K'i^n = (K - K')\, i^n$$

Ahora bien, este resultado se puede resolver en cero o en un indefinidamente pequeño del orden *n*, según sea $K \gtreqless K'$, y también en un indefinidamente pequeño de orden superior a *n* si $K = K' + \alpha$ siendo α un indefinidamente pequeño. En este último caso se dice que las cantidades infinitesimales difieren entre si indefinidamente poco, y su importancia es tan grande para los cálculos, que bien cabe afirmar que constituye el principal pedestal para resolver muchos problemas que se refieren al cálculo infinitesimal.

Las consideraciones generales que preceden nos dan a conocer la importancia que debe concederse a la Filosofía para que fructifique, sobre base sólida, la Ciencia matemática. M. Moigno dice «*que la Ciencia como es humana, como todas las cosas humanas, tiene también sus quebrantos y debilidades; sus peligros son numerosos y considerables*»

Por esto interesa estudiar debidamente las raíces de ese precioso árbol de la Matemática, para que viva y fructifique; raíces constituidas por principios dentro de la buena lógica.

En la Matemática existe un como ser misterioso, que impulsa al hombre a buscar el mayor grado de indeterminación en las cuestiones; pero, desgraciadamente, los medios con que cuenta no responden a sus conceptos; la palabra discontinua, digámoslo así, debe servir para expresar la continuidad de la idea; los signos y algoritmos, de suyo harto vagos y pesados, no siempre siguen al pensamiento, todo lo cual detiene su mano no pocas veces, obligándole a dejar la obra emprendida. Los trabajos realizados en Alemania, Bélgica, Inglaterra, Francia e Italia, señalan las últimas conquistas de nuestros días, pero mientras el espíritu científico tenga por base única el materialismo o panteísmo, no hay que esperar verdaderos avances; estacionarse exclusivamente en el mundo real o en el de las ideas, es entorpecer su verdadero progreso.

Los científicos que se basan en una sana Filosofía son los únicos que nos pueden servir de guía; éstos son los que señalan la imperiosa necesidad que existe de aunar los dos mundos precitados, convencidos de que solo en la línea de intersección de los mismos pueden germinar los fundamentos de las Ciencias Exactas.

Interesa aproximarnos, pues, a esa línea media de investigación, nutriendo nuestro entendimiento en principios razonables y siempre dentro de las leyes naturales en que puede desarrollarse la inteligencia humana.

Por esto el recuerdo de los matemáticos Newton y Leibnitz es imperecedero, pues por ser a la par filósofos imprimieron verdaderos avances a la Ciencia matemática. Procuremos seguir sus huellas, si deseamos que los progresos de esta Ciencia sean más notables de los que se realizan en los tiempos presentes.

Estimulemos a la juventud a que se dedique a los estudios filosóficos, para que procure abrir nuevas brechas y no quepa decir, como Lagrange, que la mina se agotó. Establézcanse a este fin clases de Metafísica del Cálculo, y si a este punto no llega, desgraciadamente, nuestro país, levantemos siquiera el bajo nivel en que se halla hoy la asignatura que se designa en nuestras Universidades con el nombre de «Elementos de Cálculo infinitesimal», estableciendo una clase de «Complemento de Cálculo infinitesimal», a lo menos para las Secciones de Exactas y Físicas, pues nadie ignora que en los tiempos presentes no es posible estudiar Física, Astronomía, Geodesia, Mecánica y hasta Química y Cristalografía, sin estar bien impuesto en Cálculos.

Levantemos, por fin, nuestra voz en Congresos como el presente, en Centros docentes y en el Parlamento, todos los que amamos y sentimos la Ciencia, con objeto de evitar las deficiencias en la enseñanza y para que los nombres de Progreso, Regeneración y Cultura sean una verdad en nuestra amada España.

Zaragoza[1], a 24 de Octubre de 1908
Lauro Clariana Ricart

[1] Asociación Española para el Progreso de las Ciencias