Armonía entre algunas líneas notables

1912

N no pretendemos remontarnos a grandes alturas, ni tampoco pensamos condensar demasiado los conceptos, así como los cálculos, pues todo ello es causa muchas veces de llevar a mal traer al pobre lector. Tratamos de dar a conocer solamente ciertas relaciones notables entre líneas conocidas, y esto con la mayor claridad posible. En su virtud, vamos a ocuparnos de la tractriz, no solo como envolvente de la catenaria, sino también como trayectoria ortogonal de las tangentes a la catenaria; luego aplicaremos dicha trayectoria a una circunferencia móvil y, por último, a las tangentes de un círculo fijo para alcanzar, respectivamente, la tractriz otra vez o la envolvente de círculo.

No se comprende como la mayor parte de autores, al ocuparse de la catenaria, no rinden tributo a las funciones hiperbólicas, pues sin duda que ellas reducen considerablemente los cálculos efectuados con relación a las funciones exponenciales.

Comencemos dando algunas fórmulas de la catenaria bajo este nuevo punto de vista. Sea la ecuación ordinaria de la catenaria:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)$$

según las funciones hiperbólicas, cabe escribir

$$y = a\,Ch\,\frac{x}{a}$$

Así, pues, como

$$Ch\,\frac{x}{a} = \mathrm{I} + \left(\frac{\frac{x}{a}}{\mathrm{I}.2} \right)^2 + \cdots\cdots,$$

para $x = 0$, resulta y = *a*.

Conforme a las reglas de derivación, y según la figura adjunta, si *pt* es una tangente a la catenaria en el punto *p*, se tiene (*fig.* 1ª)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = Sh\,\frac{x}{a}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{I}}{a}\,Ch\,\frac{x}{a}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\mathrm{I} + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{\mathrm{I}}{\sqrt{\mathrm{I} + Sh^2\,\frac{\alpha}{a}}} = \frac{\mathrm{I}}{Ck\,\frac{x}{a}} = \frac{a}{y} \qquad [1]$$

La fórmula general de la normal de:

$$N = y\sqrt{\mathrm{I} + y'^2} = y\sqrt{\mathrm{I} + Sh^2\frac{x}{a}} = y\,Ch\frac{x}{a} = \frac{y^2}{a}$$

Para la diferencial de un arco se obtiene:

$$ds = dx\sqrt{\mathrm{I} + y'^2} = dx\sqrt{\mathrm{I} + Sh^2\frac{x}{a}} = Ch\frac{x}{a}dx$$

al integrar:

$$s = \int Ch\frac{x}{a}dx = \frac{\mathrm{I}}{a}Sh\frac{x}{a} = \frac{\mathrm{I}}{a}\sqrt{Ch^2\frac{x}{a} - \mathrm{I}} = \frac{\mathrm{I}}{a}\sqrt{\frac{y^2}{a^2} - \mathrm{I}} = \sqrt{y^2 - a^2} \qquad [2]$$

Determinemos ahora la perpendicular *nm* trazada desde el pie de la ordenada a la tangente correspondiente al punto que se considera de la catenaria,

luego: $mn = y\cos\alpha$,

y según [1]:

$$mn = y\frac{a}{y} = a$$

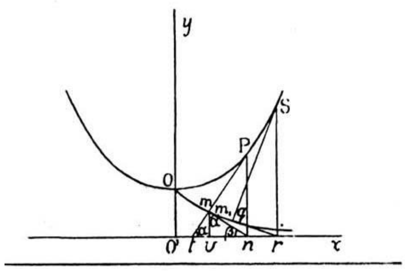

Figura. 1ª

De donde resulta para la porción de tangente *pm*

$$pm = \sqrt{y^2 - a^2}$$

y en virtud de [2]

$$pm = op = s$$

Así, *m* es un punto de la envolvente de la catenaria, el cual corresponde, como demostraremos luego, a la tractriz.

Para el radio de curvatura resulta:

$$R = \frac{\left(\mathrm{I} + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''} = \frac{\left(\mathrm{I} + Sh^2\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{a}}Ch\frac{x}{a}} = \frac{a\left(Ch\frac{x}{a}\right)^3}{Ch\frac{x}{a}} = a\,Ch^2\frac{x}{a} = a\frac{y^2}{a^2} = \frac{y^2}{a}$$

valor igual al de la normal ya hallado.

Recíprocamente, puede admitirse que la curva cuya normal es igual al radio de curvatura, es la catenaria, tomados ambos valores con el mismo signo, esto es:

$$\frac{\left(\mathrm{I}+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}=y\sqrt{\mathrm{I}+y'^2}$$

y como

$$dy''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dy'}{dy}y'$$

se deduce de la fórmula anterior

$$\frac{y'dy'}{\mathrm{I}+y'^2}=\frac{dy}{y}$$

al integrar

$$l\left(\mathrm{I}+y'^2\right)=l\,\frac{y^2}{\alpha^2}$$

de donde

$$y'=\frac{\sqrt{y^2-\alpha^2}}{\alpha}\qquad\qquad \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^2-\alpha^2}}{\alpha}$$

Integrando otra, vez, se obtiene

$$\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-\alpha^2}}=\int\frac{dx}{\alpha}$$

de donde

$$l\left[\frac{y}{\alpha}+\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}-\mathrm{I}}\right]=\frac{x-\beta}{\alpha};\qquad\qquad \frac{y}{\alpha}+\sqrt{\frac{y^2}{\alpha^2}}-\mathrm{I}=e^{\frac{x\text{-}\beta}{\alpha}}$$

y, por simples reducciones, se deduce

$$2\frac{y}{\alpha}e^{\frac{x-\beta}{\alpha}}=e^{2\left(\frac{x-\beta}{\alpha}\right)}+\mathrm{I}$$

y, por fin,

$$\mathrm{y}=\frac{\alpha}{2}\left[e^{\frac{x-\beta}{\alpha}}+e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}}\right]$$

ecuación de la catenaria.

Ahora bien, de lo que precede y, atendiendo a la *figura 1ª*, se deduce fácilmente que $oo' = a = mn = qr = \cdots$

Además, *omq*.... es la envolvente de la catenaria por corresponder los arcos *op, os*.... a las tangentes *pm, sq*...., y como quiera que *mp, sq*.... son normales de *omq*...., siendo *mn, qr*.... perpendiculares a dichas normales, resulta que *mn, qr*.... son tangentes iguales de la envolvente. Así, pues, apoyándonos en este principio podemos determinar la ecuación correspondiente a *omq*...., la cual toma el nombre de tractriz.

A este fin prolonguemos la normal *mp* hasta *t*, y del triángulo *tmn* resulta $mt = mn\,\mathrm{tg}\,\beta$, de donde:

$$y\sqrt{\mathrm{I} + y'^2} = ay'$$

ecuación diferencial de primer orden, de la cual se deduce

$$\mathrm{I} + y'^2 = \frac{a^2 y'^2}{y^2}, \qquad y^2 = \left(a^2 - y^2\right) y'^2, \qquad \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,dy = dx \qquad [3]$$

Para integrar, tendremos

$$\frac{a^2 - y^2}{y\sqrt{a^2 - y^2}}\,dy = dx$$

luego

$$a^2 \int \frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} - \int \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = x + C \qquad [4]$$

Supondremos $y = \frac{\mathrm{I}}{t}$ en la primera integral, de donde

$$a^2 \int \frac{dy}{y\sqrt{a^2 - y^2}} = -a \int \frac{adt}{\sqrt{a^2 t^2 - \mathrm{I}}} = -a.l\left[at + \sqrt{a^2 t^2 - \mathrm{I}}\right] = -a.l\,\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$$

De la segunda integral resulta inmediatamente

$$-\int \frac{ydy}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \sqrt{a^2 - y^2}$$

Luego la ecuación definitiva para la tractriz, atendiendo a la variabilidad de signos que pueden ofrecer las raíces cuadradas, será, según [**4**].

$$x + C = \pm\left[+\sqrt{a^2 - y^2} - a.l\,\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right]$$

La ecuación que corresponde a la rama de curva correspondiente al cuadrante positivo, partiendo de 0, es

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + a.l\,\frac{\sqrt{a^2 - y^2} + a}{y} \qquad [\mathrm{A}]$$

Otro concepto podría utilizarse para determinar la ecuación de la tractriz. En efecto, dicha tractriz no es más que la trayectoria ortogonal relativa a las diferentes tangentes de la catenaria, y como *mn* es perpendicular a la tangente *mp* de la catenaria, resulta que un elemento diferencial mm_1 de *mn*, debe corresponder a la tractriz y a la trayectoria ortogonal, de suerte que, si consideramos el triángulo *mnv*, por ser *mv* = *y*, como ordenada de la tractriz $mn = a$ y $vn = y\,\frac{dx}{dy}$, representante de la subtangente, se tendrá

$$\sqrt{a^2 - y^2} = y\,\frac{dx}{dy}$$

ecuación diferencial de la trayectoria ortogonal a la par que de la tractriz, la cual corresponde con [**3**], debiendo procurar, después de la integración. la misma ecuación [**A**] de la tractriz.

Por último, de

$$y = a\,Ch\,\frac{x}{a}$$

se deduce

$$\sqrt{y^2 - a^2} = \sqrt{a^2\left(Ch^2\,\frac{x}{a} - \mathrm{I}\right)} = aSh\frac{x}{a}$$

y por ser

$$Sh\frac{x}{a} = y'$$

se obtiene

$$y' = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

de cuya fórmula resulta una sencilla construcción para determinar la tangente en un punto de la catenaria.

Dejando aparte muchas más consideraciones que podríamos indicar relativas a la tractriz, veamos ahora si se la puede obtener también al considerar la trayectoria ortogonal de un círculo móvil.

Supongamos un círculo de radio *R* constante, cuyo centro se mueve en el eje *x*:

$$(x-\alpha)^2 + y^2 - R^2 = f(x, y, R) = 0$$

La ecuación diferencial de una trayectoria ortogonal es

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

luego

$$y - \frac{dy}{dx}\sqrt{R^2 - y^2} = 0$$

o sea

$$\frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}\, dy = dx$$

Al integrar, supondremos

$$y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

de donde

$$dy = R\cos\varphi\, d\varphi$$

$$x = \int \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{y}\, dy = \int \frac{R\cos^2\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi} d\varphi = R\int \frac{\mathrm{I} - \mathrm{sen}^2\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi} dy = R\left[\int \frac{d\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi} - \int \mathrm{sen}\,\varphi\, d\varphi\right]$$

Estas integrales son bien conocidas, resultando

$$x = R\left[l\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} + \cos\varphi\right] + C \quad [\mathrm{a}]$$

Pero

$$\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{2\,\mathrm{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\mathrm{sen}\,\varphi}{\mathrm{I} + \cos\varphi}$$

$$y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

luego se obtiene fácilmente

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{R+\sqrt{R^2-y^2}} = \frac{R-\sqrt{R^2-y^2}}{y}$$

$$R\cos\varphi = \sqrt{R^2-y^2}$$

Al subsistir valores en [**a**], resulta definitivamente

$$x = R.l\,\frac{R-\sqrt{R^2-y^2}}{y} + \sqrt{R^2-y^2} + C$$

expresión que corresponde con la fórmula de la tractriz hallada, con solo suponer la cantidad constante *a* igual al radio *R* de la circunferencia, y cambiando el signo del radical, lo que es factible por tratarse de una raíz cuadrada.

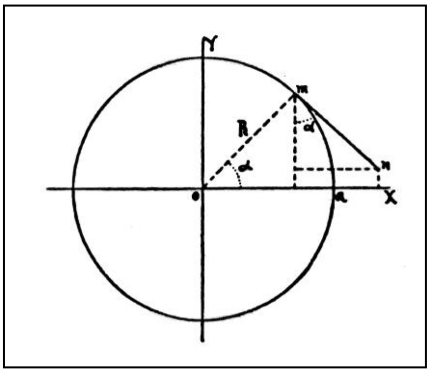

Figura.2

Por fin, si supusiéramos la circunferencia fija, podemos hallar su envolvente, ora directamente, ora partiendo de la trayectoria ortogonal

Hallémosla primero directamente. Si la tangente *mn* (Figura 2ª) es igual al arco *am* rectificado, el punto *n* es de la envolvente, cuyas ecuaciones de las coordenadas de un punto de la misma, se deducen fácilmente a la vista de la *figura 2ª*.

$$x = R\left[\cos\alpha + \alpha\operatorname{sen}\alpha\right], \quad y = R\left[\operatorname{sen}\alpha - \alpha\cos\alpha\right]$$

De estas ecuaciones resultan las siguientes:

$$x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha = R, \qquad x^2+y^2 = R^2\left(\mathrm{I}+\alpha^2\right), \qquad \alpha = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{R^2}-\mathrm{I}} \qquad [\mathrm{b}]$$

sustituyendo este valor en la primera [**b**], resulta

$$x\cos\sqrt{\frac{x^2+y^2-R^2}{R^2}} + y\operatorname{sen}\sqrt{\frac{x^2+y^2-R^2}{R^2}} = R$$

Al pasar a coordenadas polares, siendo $x=\rho\cos\alpha,\ y=\rho\operatorname{sen}\alpha,$ se obtiene:

$$\rho\cos\alpha\cos\sqrt{\frac{\rho^2-R^2}{R^2}} + \rho\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\sqrt{\frac{\rho^2-R^2}{R^2}} = R$$

de donde

$$\rho \cos\left[\frac{\sqrt{\rho^2 - R^2}}{R} - \alpha\right] = R$$

o sea

$$\alpha = \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2}}{R} - \arccos\frac{R}{\rho} \qquad [c]$$

Por último, podemos deducir esta ecuación al considerar la envolvente de círculo como trayectoria ortogonal de las diferentes tangentes trazadas a la circunferencia dada, considerada ésta como evoluta.

En efecto, la ecuación de una tangente cualquiera de la circunferencia de radio *R*, es:

$$y = \frac{dy}{dx}x + R\sqrt{\mathrm{I} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

llamando

$$\frac{dy}{dx} = m$$

resulta

$$y = mx + R\sqrt{\mathrm{I} + m^2}$$

o sea

$$y = mx + F(m), \qquad y - mx - F(m) = 0 \quad [5]$$

Esta es la ecuación de la tangente, que también puede expresarse por $f(x, y, m) = 0,$ en la cual, dando valores particulares a *m*, resultan diferentes tangentes a la circunferencia de radio *R*.

Así, pues, ya que la envolvente de círculo es la trayectoria ortogonal de las tangentes anteriores, consideradas como normales de dicha envolvente, bastará tomar la ecuación general de la trayectoria ortogonal:

$$\mathrm{I} - \frac{dy}{dx}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = 0 \qquad [d]$$

siendo *f* la ecuación [**5**] anterior, representante de las tangentes al círculo primitivo como evoluta, siendo dichas tangentes normales a la envolvente, luego

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{I}, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = -m$$

de donde según [**d**]

$$\mathrm{I}+\frac{dy}{dx}m=0, \qquad m=-\frac{dx}{dy}$$

Elimínase ahora m entre esta ecuación y $f(x,y,m)=0$ para obtener la ecuación diferencial de dicha trayectoria ortogonal correspondiente a la envolvente de círculo. En efecto, se tiene

$$\mathrm{y}=-\frac{dx}{dy}x+R\sqrt{\mathrm{I}+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

o sea

$$ydy+xdx-R\sqrt{dx^2+dy^2}=0$$

Para integrar, podemos referirnos a ejes polares, y después de sencillas operaciones, se obtiene

$$\rho^2 d\rho^2=R^2\left(d\rho^2+\rho^2 d\,\theta^2\right) \qquad d\,\theta=\frac{d\rho\sqrt{\rho^2-R^2}}{R\rho}$$

integrando

$$\theta+C=\int\frac{\sqrt{\rho^2-R^2}}{R\rho}d\rho=\int\frac{\rho^2-R^2}{R\rho\sqrt{\rho^2-R^2}}\,d\rho=\frac{\mathrm{I}}{R}\sqrt{\rho^2-R^2}-\int\frac{Rd\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-R^2}}$$

Supondremos $\rho=\frac{\mathrm{I}}{t}$ en la última integral, de donde

$$\int\frac{Rd\rho}{\rho\sqrt{\rho^2-R^2}}=-\int\frac{Rdt}{\sqrt{\mathrm{I}-t^2R^2}}=\mathrm{arcsen}\,Rt=-\mathrm{arcsen}\frac{R}{\rho}$$

Luego, en definitiva, resulta

$$\theta=\frac{\mathrm{I}}{R}\sqrt{\rho^2-R^2}+\mathrm{arcsen}\frac{R}{\rho}-c \quad [\mathrm{e}]$$

Esta fórmula corresponde con [**c**], siendo:

$$\alpha=\theta, \qquad \mathrm{arcsen}\frac{R}{\rho}-c=-\mathrm{arccos}\frac{R}{\rho}$$

puesto que de

$$\operatorname{arcsen}\frac{R}{\rho}+\operatorname{arccos}\frac{R}{\rho}=\frac{\pi}{2}$$

se deduce

$$\operatorname{arcsen}\frac{R}{\rho}-\frac{\pi}{2}=-\operatorname{arccos}\frac{R}{\rho}$$

Así, pues, la ecuación [e] corresponde con [**c**] en el concepto de que la constante tome el valor $\frac{\pi}{2}$.

Sin duda que, poder llegar a una misma finalidad, partiendo, al parecer, de conceptos bien distintos, nos da a comprender cuál es la fecundidad, exactitud y belleza que encierra la Ciencia matemática.

Barcelona a 16 Marzo de 1912
Lauro Clariana Ricart